

# 光学学报

## 拓扑光学体系中合成维度方法的进展

刘辉<sup>1\*</sup>, 严志伟<sup>1</sup>, 肖孟<sup>2</sup>, 祝世宁<sup>1</sup>

<sup>1</sup>南京大学物理学院固体微结构物理国家重点实验室, 人工微结构科学与技术协同创新中心, 江苏 南京 210093;

<sup>2</sup>武汉大学物理科学与技术学院人工微结构教育部重点实验室, 湖北 武汉 430072

**摘要** 光子学中的合成维度是近年来微纳光学和拓扑光子学的研究热点。通常意义上, 一个光学系统的物理维度受限于其空间几何维度, 因此极大地制约了光学系统所支持研究的物理现象。而研究者通过引入合成维度, 可以突破几何维度对物理系统维度的制约, 研究高维空间的物理问题。同时, 合成维度的高度可控性和选择的丰富多样性, 为简化系统设计、观察高维物理现象提供了很大的便利。本文介绍了光子学中合成维度的基本概念, 回顾了近年来实现合成维度的各种设计方案, 并初步探讨了其在基础物理研究和应用上的未来前景。

**关键词** 光学器件; 合成维度; 合成空间; 规范势; 拓扑光子学; 参数空间

中图分类号 TN256

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202141.0123002

### Recent Progress in Synthetic Dimension in Topological Photonics

Liu Hui<sup>1\*</sup>, Yan Zhiwei<sup>1</sup>, Xiao Meng<sup>2</sup>, Zhu Shining<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Collaborative Innovation Center of Advanced Microstructures, National Laboratory of Solid State Microstructures, School of Physics, Nanjing University, Nanjing, Jiangsu 210093, China;

<sup>2</sup> Key Laboratory of Artificial Micro- and Nano-Structures of Ministry of Education, School of Physics and Technology, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China

**Abstract** Synthetic dimension emerges as a new frontier of the researches in nanophotonics and topological photonics. It is general believed that the dimension of a physical system cannot be larger than its geometric dimensionality. With the introduction of additional synthetic dimensions, and combined with the intrinsic geometric dimension, one can investigate higher dimensional physics. Meanwhile, the synthetic dimension is highly controllable which contributes to the observation of many high-dimensional novel phenomena. In this review, we introduce the basic concepts of synthetic dimension in photonics, summarize various proposals and set-ups in generating new synthetic dimension, and briefly discuss potential contributions of synthetic dimension in fundamental physics as well as applications.

**Key words** optical devices; synthetic dimension; synthetic space; gauge potential; topological photonics; parameter space

**OCIS codes** 230.1150; 240.3990; 260.1180; 350.4238

## 1 引言

常见的光学系统有 0 维的微腔<sup>[1-2]</sup>、一维(1D)的波导<sup>[3]</sup>、二维(2D)的平面光子晶体<sup>[4]</sup>、三维(3D)

的超构材料<sup>[5-6]</sup>等, 其对应的物理系统维度分别为 0 维、一维、二维和三维。当然利用二维光子晶体也可以构建一维的波导, 这个时候物理系统的维度就小于其几何结构。因此可以看出, 通常情况下物理系

收稿日期: 2020-10-29; 修回日期: 2020-12-05; 录用日期: 2020-12-08

基金项目: 国家自然科学基金(11690033, 61425018, 11621091, 11704181, 11904264)、国家重点研发计划(2017YFA0303702, 2017YFA0205700)

\* E-mail: liuhui@nju.edu.cn

统的维度都是小于或等于其几何维度的。然而最近的研究表明,引入合成维度的概念后,研究者可以在较低的几何维度上研究高维度的物理系统<sup>[7-9]</sup>。例如,在一个  $D$  维的几何空间上引入  $d$  个合成维度,就能模拟一个有着  $D+d$  个等效空间维度的系统。在此基础上,研究者就可以构建高维的物理系统并加以研究。

在光子学中,常见的构成合成维度的方法大体上可以分为两类<sup>[7]</sup>。一类是构造人工晶格结构。假设系统由一系列离散的物理态构成,然后通过某些特定的方法,将这些物理态耦合起来,就可以构建人工晶格结构。另一类是引入系统的参数。通过系统的结构或者物理参数引入合成维度,实际上是引入独立的参数自由度。考虑一个  $n$  维空间的系统,其哈密顿量可表示为  $H(q_1, \dots, q_m, r_1, \dots, r_n)$ , 其中  $q_1, \dots, q_m$  是外部参数,  $r_1, \dots, r_n$  是空间坐标。这个哈密顿量里面的每个外部参数和空间坐标其实处于一个等价的位置,可以认为是一个额外的合成维度。

合成维度在光子学中具有独特之处。光子具有多个内禀自由度,在选择光子态来构造人工晶格时,可以利用光子系统中不同的频率、角动量或者空间模式等。相应地,合成空间的构造也为在光子系统中操控这些内在自由度提供了可能,在通信和信息处理方面有着重要的潜在应用前景<sup>[10]</sup>。上述两种构造合成维度的方法除了应用在光子学上,还被广泛用于探索其他物理系统,例如光晶格中的冷原

子<sup>[11-46]</sup>、超导比特<sup>[47-50]</sup>等。合成维度的引入带来了传统系统难以比拟的优势:1)增加系统维度。除了之前所提到的在低维系统研究高维的物理问题,合成维度还能实现传统物理系统不能企及的高维物理。高维物理系统(高于三维)存在丰富的物理性质,尤其在拓扑物理领域<sup>[51-55]</sup>。合成维度的发展也为探索这些物理系统提供了极好的实现平台和实验研究可能。2)降低实验难度。尽管一些三维结构原则上也能研究三维的物理系统,但是实际加工这些结构具有非常大的挑战。而通过引入合成维度,人们可以在更容易构造的一维或者二维结构中研究这些高维物理系统。3)增加系统可控性。合成维度普遍具有很强的可控性,特别是可以动态调控。因此合成维度的引入为实验提供了很好的调控方式。

本文综述了光子学中合成维度的研究进展。按照构成合成维度的方法,本文主要分为两部分:1)介绍构造合成维度的第一种方法,即通过设计各种光子态之间的耦合来形成人工晶格,并详细综述多种实现方法;2)介绍构造合成维度的第二种方法,即引入系统的参数依赖来研究高维的光学现象,具体阐述一些实例和应用。最后一部分进行总结。

## 2 构造光子态的人工晶格

通过构造人工晶格的方法来构成合成维度,需要两个关键要素:1)一系列光子态;2)将这些光子态耦合起来的机制。例如,如图1(a)所示,假设物理系统

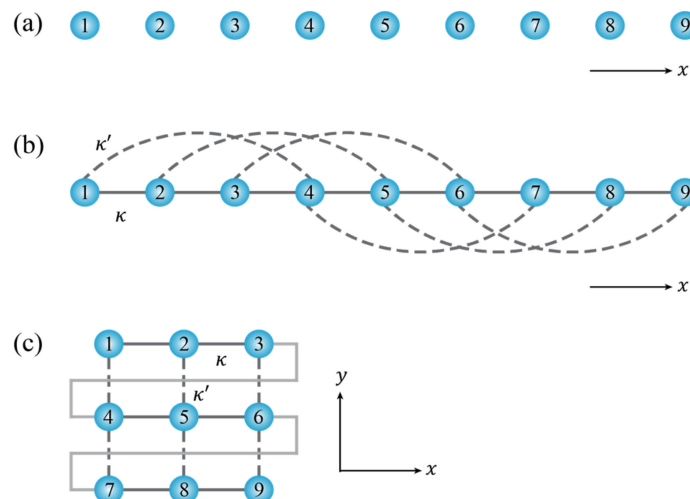


图 1 构造人工晶格。(a)由连续整数标注的物理态;(b)物理态之间引入最近邻耦合,形成一维系统;  
(c)物理态之间引入特殊的长程耦合,形成二维系统<sup>[56-57]</sup>

Fig. 1 Forming artificial lattices. (a) Physical states labeled by consecutive integers; (b) introducing nearest-neighbor coupling between physical states to create a one-dimensional system; (c) introducing a special long-range coupling between physical states to create a two-dimensional system<sup>[56-57]</sup>

包含沿  $x$  方向上的 9 个离散的物理态,采用连续的整数标注它们;而在图 1(b)中,引入最近邻耦合(实线),可以构造出一个一维的晶格;更进一步,如果再引入长程耦合(虚线),实际上就形成了一个  $x$ - $y$  方向的二维系统,如图 1(c)所示<sup>[56-57]</sup>。这里可以看出,耦合的具体连接方式会决定系统最终的维度。

光子学为构造人工晶格提供了丰富的可能。光子系统的物理态,包括光子模式的轨道角动量和频率自由度,而且广义上不同的时域脉冲也可以看作不同的物理态。本节将对通过构造人工晶格来构造合成维度的多种方案进行综述。

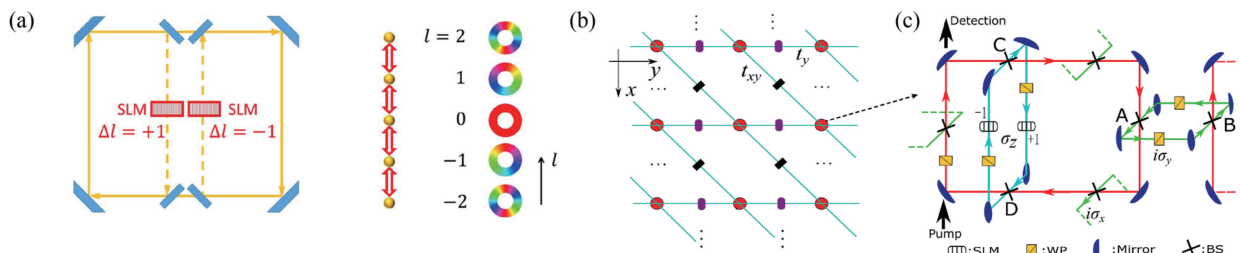


图 2 利用不同的轨道角动量构造合成维度。(a)简并环形腔构造了角动量维度的合成晶格<sup>[58]</sup>;  
(b)二维简并腔阵列<sup>[61]</sup>;(c)简并腔的物理实现<sup>[61]</sup>

Fig. 2 Using different orbital angular momenta to create a synthetic dimension. (a) A degenerate cavity can be described by a synthetic lattice along the direction of the angular momenta<sup>[58]</sup>; (b) a 2D degenerate cavity array<sup>[61]</sup>; (c) physical implementation of degenerate cavity<sup>[61]</sup>

2015 年,Luo 等<sup>[58]</sup>率先用这种方法,基于一维的光学腔阵列,结合 OAM 这个额外维度,构造出了在等效磁场中的二维晶格,实现了边界态传输的模拟。2017 年,他们提出了基于 OAM 的全光器件,显示出了合成维度在量子信息处理上的巨大潜力,譬如量子存储、光学滤波等<sup>[59]</sup>。2018 年,他们在单独一个环形腔中引入多个辅助腔,在 OAM 这个维度实现了 AAH(Aubry-André-Harper)的拓扑模型,能够高效利用高阶的 OAM 模式,成功实现快速、高效、鲁棒的 OAM 开关<sup>[60]</sup>。

2017 年,Sun 等<sup>[61]</sup>在二维的光学腔阵列中,引入 OAM 合成维度作为第 3 个维度,成功构造了三维的外尔系统。通过调控波片角度来控制不同偏振的光,模拟了固体物理中的自旋轨道耦合,调控辅助腔来控制不同 OAM 光束的耦合[图 2(b)、(c),其中圆代表单独的光学腔],最终实现了合成三维空间里的外尔点,并且充分发挥了光学腔的体系优势,便捷地研究了外尔点的传输性质和自旋结构。而在系统边界的调控方面,2017 年,Zhou 等<sup>[62]</sup>在单独的一个环形腔内,通过中间挖孔的分束器将  $l=0$  模式和

## 2.1 利用不同轨道角动量的光子模式

首先介绍利用光子模式的横向自由度构造合成维度。考虑一束围绕环状腔的光,它支持不同的腔共振模式,其横向分布是非零的轨道角动量(OAM)[图 2(a)]。一般来说,这些腔膜的共振频率取决于相应回旋光束的轨道角动量。然而,通过特殊的设计,人们可以构造出一个简并的光学腔,使得它所支持的不同 OAM 的光束具有相同频率。在这样的简并光学腔内,人们就可以引入一个包含空间光调制器的辅助腔,将部分 OAM 为  $l$  的光与 OAM 为  $l-1$  和  $l+1$  的光耦合起来构成晶格。因此这里的光子态是不同 OAM 的光子态,耦合机制是引入空间光调制器。

$l \neq 0$  模式区分开来,从而在合成的 OAM 维度构造出陡峭的边界。在此基础上,他们成功实现了基于 SSH(Su-Schrieffer-Heeger)模型的边界态以及 Floquet 拓扑绝缘体<sup>[63]</sup>的相变。2019 年,Jiang 等<sup>[64]</sup>基于传输线网络也实现了轨道角动量的耦合,在实验上观测到了 OAM 相关的单向边界态。

此外,合成 OAM 维度也被广泛应用于量子行走的研究。量子行走最简单的形式是一个粒子在一维格点上的离散时间演化。Cardano 等<sup>[65]</sup>将光子态的 OAM 作为格点,左旋和右旋圆偏振作为两个硬币态[图 3(a),其中深色盘是 1/4 波片,浅色盘是涡旋波片],再让光通过级联的 1/4 波片和涡旋波片等效为离散的时间演化。基于这个模型他们首次在实验上测量出了手性量子行走体系的 Zak 相位。2018 年,Wang 等<sup>[66]</sup>利用空间维度和 OAM 维度[图 3(b)],首次在实验上实现了二维的量子行走,且观测到周期驱动系统独有的二维的拓扑束缚态。

## 2.2 利用不同频率下的光子模式

在光子学构造合成维度中,另一种自然的方法就是利用光的频率。光子结构天然地能够支持不同

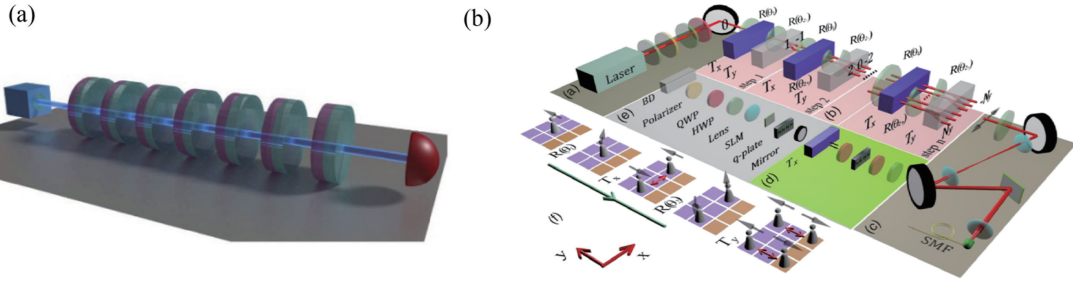


图 3 利用轨道角动量实现量子行走。(a) 一维量子行走设计图<sup>[65]</sup>; (b) 二维量子行走实验设计图<sup>[66]</sup>  
 Fig. 3 Using orbital angular momentum to realize quantum walks. (a) Scheme of one-dimensional quantum walk<sup>[65]</sup>; (b) experimental scheme of 2D quantum walks<sup>[66]</sup>

频率的模式。将这些模式耦合在一起,就能形成一个人工晶格。具体的耦合方法可以通过介电常数的动态调控,或者通过非线性光学的手段。

基于光子的不同频率来构造合成维度,一个重要的载体就是谐振环。如图 4(a)所示,考虑一个由单模波导组成的静态谐振环,假设其群速度色散为零,谐振环在频率为  $\omega_0$  处支持一个谐振模式。在  $\omega_0$  附近,不同的谐振模式形成一个等间距的频率梳,第  $m$  阶模式的频率可表示为  $\omega_m = \omega_0 + m\Omega_R$ , 其中,  $\Omega_R = 2\pi c/n_0 L$  是谐振环的自由光谱程,它决定了频率维度上的模式间距,  $n_0 = n(\omega_0)$  为波导在  $\omega_0$  的群折射率,  $L$  是谐振环的周长。给谐振环加入一个动态调控,使其介电常数发生如下变化  $\delta\epsilon = \delta\cos(\Omega t + \phi)$ , 其中  $\delta$  为调控幅度,  $\Omega$  为调控频率,  $\phi$  为调控相位。若将调控频率设为  $\Omega_R$ , 则对于第  $m$  阶模式,诱导的极化场将会共振激发  $m+1$  阶和  $m-1$  阶模式,同时会携带相应的调控相位。此时,单个谐振环的哈密顿量可以写为

$$H = g \sum_m [\exp(i\phi) c_{m+1}^\dagger c_m + \exp(-i\phi) c_m^\dagger c_{m+1}], \quad (1)$$

式中:  $g$  为耦合强度;  $c_m$  ( $c_m^\dagger$ ) 是第  $m$  阶模式的湮灭(产生)算符。此哈密顿量描述了光子在合成频率维度上的一维紧束缚模型。由此可见,一个 0 维的谐振环,加上合适的动态调控,将不同频率的模式耦合起来,就形成了沿频率轴的一维系统。例如,2016 年, Yuan 等<sup>[67]</sup> 基于单个谐振环在合成空间的频率轴上实现了布洛赫振荡。通过选择调制频率使  $\Omega$  与模式频率间隔  $\Omega_R$  略微不同,得到的哈密顿量与(1)式有着相同的形式,但多了一个含时相位  $\phi(t) = (\Omega - \Omega_R)t$ , 相当于在合成空间引入了一个等效的不随时间变化的电场。当  $t=0$  时有一些频率分量被激发,随着时间的演化,由于等效电场效应,这些分量会振荡起来,发生了频域的布洛赫振荡现象。2019 年, Dutt 等<sup>[68]</sup> 通过测量单个谐振环时间分辨的透射谱,直接描绘出了其在合成频率空间的

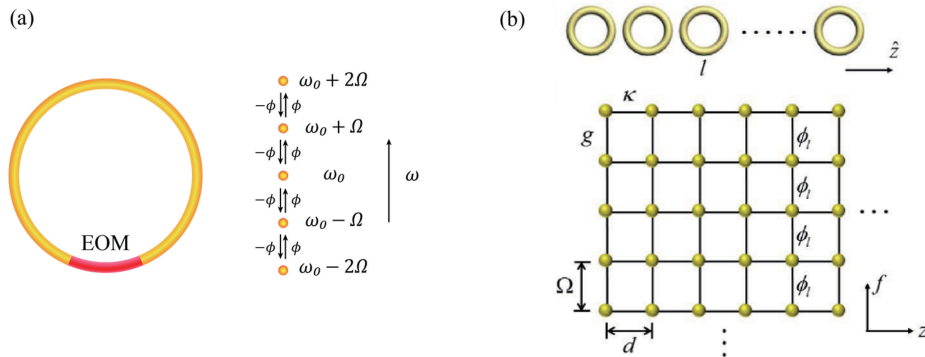


图 4 利用谐振环构造合成频率维度。(a) 电光调制器(EOM)动态调制的谐振环在合成频率维度构造了一个一维人工晶格,可用紧束缚模型描述<sup>[67]</sup>; (b) 一维谐振环阵列可映射到二维合成空间,其中额外的维度就是频率维度<sup>[69]</sup>

Fig. 4 Using ring resonators to create the synthetic frequency dimension. (a) A ring resonator dynamically modulated by an electro-optic modulator (EOM) can be described by a tight-binding model of a photon along a one-dimensional lattice in the synthetic frequency dimension<sup>[67]</sup>; (b) a one-dimensional array of ring resonators can be mapped into a tight-binding model in two-dimension, with the extra dimension being the synthetic frequency dimension<sup>[69]</sup>

能带结构。

有了单个谐振环所支持的频率维度,人们自然地想到将多个谐振环排成阵列。2016 年, Yuan 等<sup>[69]</sup>将谐振环排成一个阵列,使最近邻的谐振环中具有相同频率的模式可以通过倏逝隧穿的方式进行耦合,构造出了二维合成空间,一个维度是阵列的空间维度,另一个维度就是构造出的合成频率维度[图 4(b)]。此时系统可由哈密顿量描述为

$$H = \sum_m g [\exp(-in\phi) c_{m,n}^\dagger c_{m+1,n} + \exp(in\phi) c_{m+1,n}^\dagger c_{m,n}] + \kappa (c_{m,n}^\dagger c_{m,n+1} + c_{m,n+1}^\dagger c_{m,n}), \quad (2)$$

式中: $m$  为同一个谐振环中不同的模式; $n$  为每个谐振环在阵列中的位置; $\kappa$  为最近邻的两个谐振环之间的耦合系数。通过将第  $n$  个环的调制相位设定为  $n\phi$ , Yuan 等实现了在合成空间的一个等效的均匀磁场  $\phi/\Omega_R d$ ,  $d$  为环间间距。他们计算了包含 21 个谐振环的系统在投影后的能带结构,由于晶格系统中等效磁场的存在,能带结构中会有单向的边界态,且具有拓扑保护性。

同年, Lin 等<sup>[70]</sup>也是基于谐振环中动态调控的

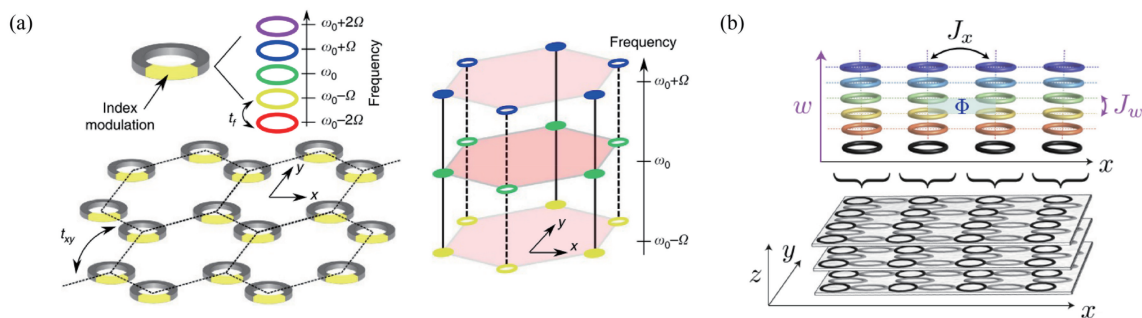


图 5 利用谐振环构造高维合成空间。(a)由二维蜂窝状谐振环晶格实现的合成三维晶格,每个谐振环经折射率调制构造出一个合成频率维度<sup>[70]</sup>; (b)由三维谐振环阵列和合成频率维度构成的等效四维晶格<sup>[77]</sup>

Fig. 5 Using ring resonators to create higher synthetic space. (a) A synthetic 3D lattice realized using 2D honeycomb array of ring resonators, each ring is subjected to an index modulation which generates a synthetic frequency dimension<sup>[70]</sup>; (b) a sketch of an effective 4D lattice composed of a 3D resonator lattice and one synthetic frequency dimension<sup>[77]</sup>

2016 年, Ozawa 等<sup>[77]</sup>提出将谐振环排成三维阵列,再结合频率这个合成维度,形成一个等效的四维(4D)晶格,实现了对四维量子霍尔效应的光学模拟。如图 5(b)所示,在  $xy$  平面,谐振环(深色)之间通过起连接作用的谐振环(浅色)产生耦合,通过特殊设计使得灰色谐振环在  $y$  轴的位置随  $z$  轴变化,产生一个等效的规范场,从而在  $yz$  平面形成一个二维量子霍尔系统,类似地再让合成的频率  $\omega$  轴上模式间的耦合随  $x$  轴变化,在  $x\omega$  平面也构成二维量子霍尔系统,当两个场同时存在时,就可以研究四

方法,在合成空间研究了外尔点的物理。外尔点是三维能带结构在线性色散附近的二重简并点。外尔点之所以成为拓扑物理学中的研究重点,是因为它对应于动量空间的一个磁单极子,并且对任何微扰都有鲁棒性。传统的支持外尔点的光学结构往往都有着复杂的三维几何结构<sup>[71-74]</sup>。然而,如果引入合成维度,在相对比较容易实现的二维结构中就能研究外尔点物理。如图 5(a)所示, Lin 等考虑了二维蜂窝状晶格的谐振环阵列,每个谐振环都带有相位调制器(PM)。正如之前所讨论的,每个环提供了沿频率轴的一个一维晶格,再结合原本的二维几何维度,此系统可以用一个三维的晶格模型来描述。通过适当地选择蜂窝晶格  $A$  点位和  $B$  点位的调制相位  $\phi_A$  和  $\phi_B$ ,可以打破空间反演或时间反演对称性,从而构造出相应的外尔点。2017 年 Zhang 等<sup>[75]</sup>基于微盘谐振器利用相似的结构也实现了外尔点,以及相应的费米弧。2018 年, Lin 等<sup>[76]</sup>也基于二维谐振环阵列实现了一个三维的拓扑绝缘体,并研究了固体物理中难以实现的螺旋错位现象。

维量子霍尔效应。

2018 年, Yuan 等<sup>[57]</sup>采用三个谐振环在合成频率空间构造出了基于 Haldane 模型<sup>[78]</sup>的二维蜂窝状晶格。如图 6(a)所示,周长相同的  $A$ 、 $B$  两个谐振环分别对应于蜂窝原胞的  $A$ 、 $B$  格点,  $C$  为另一种周长的辅助谐振环。在每个谐振环中选取特殊的动态调控: $A$ ( $B$ )环的调控形成同类格点的最近邻耦合,  $C$  环额外考虑长程耦合,最终构造出如图 6(b)所示的在圆柱曲面上有着扭曲边界的蜂窝晶格,并观察到了单向拓扑保护的边界态。由此可以推广得

出,通过选取特定的动态调控,理论上任意维度的晶格均能在谐振环这个体系中由合成频率维度实现,

此过程可以看作在一个合成维度里嵌入高维晶格<sup>[48, 56, 79-80]</sup>。

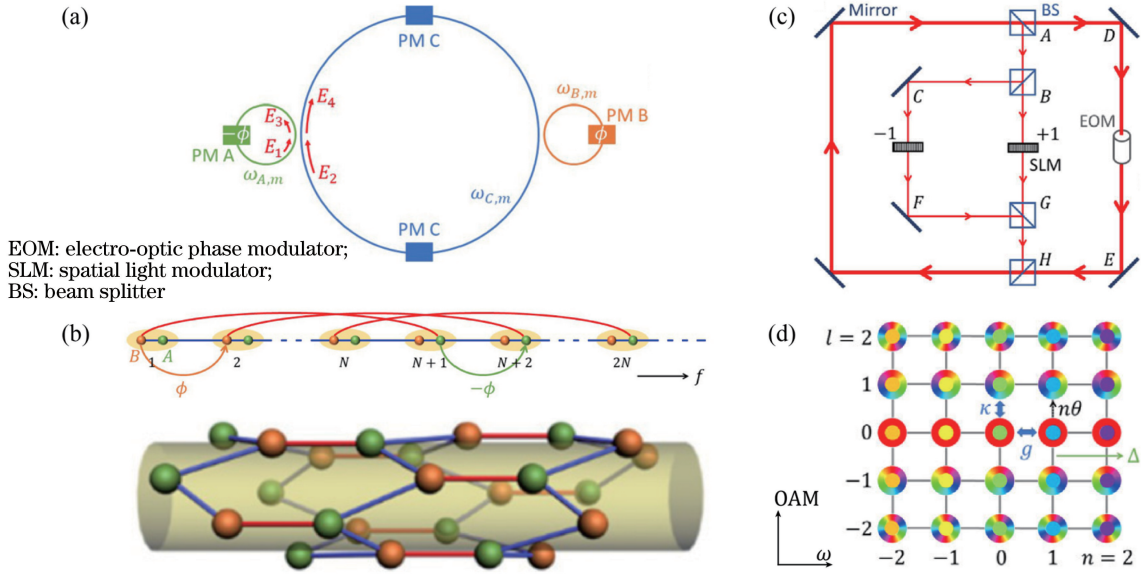


图 6 通过有限的元素构造人工晶格。(a) A 和 B 谐振环,环内各有一个相位调制器,它们中间有一个辅助谐振环 C,带有两个相位调制器<sup>[57]</sup>; (b)在(a)结构中考虑长程耦合后可在频率空间构造出一个圆柱曲面上有着扭曲边界的蜂窝状晶格<sup>[57]</sup>; (c)包含辅助路径的单个光学腔可形成一个二维的合成空间<sup>[81]</sup>; (d)由频率维度和 OAM 维度构成的二维合成空间<sup>[81]</sup>

Fig. 6 Forming synthetic lattices with finite elements. (a) Two-ring resonators A and B, each ring has a phase modulator, in between, there is an auxiliary ring C with two phase modulators<sup>[57]</sup>; (b) a honeycomb lattice on a cylindrical surface with a twisted boundary condition is created when considering long-range coupling in the system in Fig. (a)<sup>[57]</sup>; (c) a single optical cavity including an auxiliary path can form a two-dimensional synthetic space<sup>[81]</sup>; (d) a synthetic two-dimensional space consisting of the frequency and OAM dimension of light<sup>[81]</sup>

2019 年, Yuan 等<sup>[81]</sup> 基于单个简并的光学谐振腔同时构造出了 2 个合成维度。之前介绍的工作,大多是在系统原本的空间维度基础上构造一个额外的合成维度,以达到高出一维的目的。而在这篇文章中, Yuan 等在 0 维的系统中实现了 2 个合成维度的构造,一个是频率维度,另一个是上一小节讨论的 OAM 维度,并不需要空间维度的参与[图 6(c)、(d)]。利用电光调制和空间光调制的结合,他们在二维合成空间引入等效磁场,打破了时间反演对称性,在实验上观测到了拓扑保护的单向传输边界态。值得注意的是,这个边界态是局域在频率维度的边界上,沿着 OAM 轴单向传输。该设想的提出无疑力证了合成维度利用 OAM 在量子光学通信领域的应用潜力。

2020 年, Yang 等<sup>[82]</sup> 基于一维的谐振环阵列,利用其在二维合成空间中的拓扑边界态实现了拓扑保护的锁模激光脉冲输出,解决了多共振系统对微小无序敏感的难题,在激光物理领域开辟了新的机遇。

将合成维度应用到激光上的研究报道也越来越多<sup>[56, 83-87]</sup>。

除了在谐振环这个载体上构造合成频率维度,还有一种类似的方法是在波导体系中实现。2018 年, Qin 等<sup>[88]</sup> 在 LiNbO<sub>3</sub> 波导上加上电极进行含时动态调控,如图 7(a)所示,选取调控频率与波导模式相位匹配,也能构造出一个离散的频率晶格[图 7(b)]。其哈密顿量与(1)式类似,他们用频率这个自由度模拟了负折射、完美成像等现象。同年, Qin 等<sup>[89]</sup> 在此基础上,将 LiNbO<sub>3</sub> 波导上的电极拓展成阵列进行相位调制,考虑相位失配,使得相邻的两个导模通过带间跃迁进行耦合。他们设计调控相位的不同周期分布,对应一个线性变化或者周期驱动的等效规范势,从而在频率轴上实现了布洛赫振荡以及动态局域的效应。2020 年, Qin 等<sup>[90]</sup> 对 LiNbO<sub>3</sub> 波导加入复数的折射率进行调控,通过选择合适的调制振幅和相位,形成实数和虚数的调控部分,从而构造出了复数的规范势,这种复数的规范势会引起频率模式非对

称的耦合。基于此,他们观测到了频率维度上的非厄米的增强、衰减的离散衍射和反射现象,以及非厄米

的布洛赫振荡。同年, Lee 等<sup>[91]</sup>在超导传输线谐振器阵列中也实现了微波光子的布洛赫振荡现象。

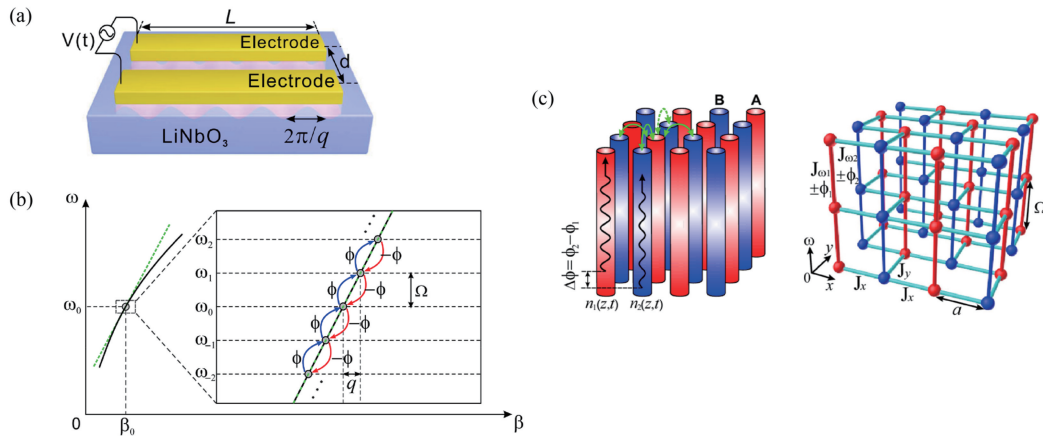


图 7 利用波导构造合成频率维度。(a)含相位调制器的 LiNbO<sub>3</sub> 波导示意图<sup>[88]</sup>; (b)波导模式的色散曲线,频率  $\omega_0$  附近光子的带间跃迁实现了对不同频率的波导模式的一个一维晶格<sup>[88]</sup>; (c)动态调控的二维砖墙晶格波导阵列,以及等效的三维晶格模型,包含平面内的砖墙晶格以及垂直方向的频率晶格<sup>[92]</sup>

Fig. 7 Using waveguides to create synthetic frequency dimension. (a) Schematic of LiNbO<sub>3</sub> phase modulator<sup>[88]</sup>; (b) dispersion curve of optical modes and photonic intraband transitions in the vicinity of  $\omega_0$  achieve a one-dimensional lattice formed from waveguide modes at different frequencies<sup>[88]</sup>; (c) dynamically adjustable 2D brick-wall lattice waveguide array and an equivalent 3D lattice model, consisting of in-plane brick-wall lattice and vertical frequency lattice<sup>[92]</sup>

2018 年, Qin 等<sup>[92]</sup>又在砖墙晶格的波导阵列中[图 7(c)],对 A、B 两类波导沿传播方向分别进行动态的折射率调制,构造出了包含频率轴的三维合成空间,在同一个结构中同时实现了一类和二类的外尔点,观察到了两类费米弧表面态,并研究了这两类外尔点之间的相变。

以上提到的调控可以用电光调控来实现。近年来,片上 Si 和 LiNbO<sub>3</sub> 在谐振环以及波导结构上调制器的发展<sup>[93-95]</sup>为构造合成晶格提供了强有力的支持。此外,在光纤谐振环上进行声光调制的方式也值得考虑。

类似的调控效果还可以通过非线性光学效应来实现<sup>[96-97]</sup>。2017 年, Bell 等<sup>[98]</sup>让一束弱的信号光经过非线性介质[图 8(a)],利用两束频率差为  $\Omega$  的强泵浦光,使信号光的频率能够改变  $\pm\Omega$ ,实现了在频率维度上的一维紧束缚模型。若两束泵浦光还包含频率差  $2\Omega$ ,则相应地,信号光能够经历次近邻的耦合,以此类推,从而实现长程耦合[图 8(b)]。在此基础上,他们在实验上实现了一个频域上的泰保效应。类似地, Yuan 等<sup>[99]</sup>也在 Raman 介质上利用四波混频过程构造了一个合成频率维度。他们将两束泵浦光之间的角度对应成一个等效规范势,作用到探测光上形成了沿合成频率轴的拓扑保护的单向边

界态。2019 年, Li 等<sup>[100]</sup>在 Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> 波导上通过四波混频的布拉格散射过程也构造出频率晶格。此系统中,相位失配会导致一个等效力,形成在频率晶格上的布洛赫振荡。此外,在考虑长程耦合后每个周期的振荡轨迹还会得到相应的改变。人们可以期待利用合成维度在光子器件中提高光学网络的复杂性,并与频分复用以及光梳技术<sup>[56, 80]</sup>进行结合。

2020 年, Zhang 等<sup>[101]</sup>利用单一微腔中的两个耦合的光学模式代替通常实现 PT (parity-time) 对称性所需的空间奇偶势场,通过布里渊散射引起两个模式中的光致透明或吸收,分别为两个模式提供了光学增益和损耗[图 8(c)]。再通过非线性变换合成一个附加的频域维度[图 8(d)],他们从理论和实验上成功实现了反 PT 的对称性,在合成频率维度观察到了非厄米相变。此方案将非厄米光子学的研究范围扩展到了合成光谱维,为全光信号处理和量子信息科学提供了一种新的研究非厄米物理的方法。此外, Schmidt 等<sup>[102]</sup>还报道了利用光子和机械振动的作用来构造频率晶格的方法。

### 2.3 利用模式自由度

这一小节我们将继续介绍基于光子其他模式自由度的方法。

2017 年, Ozawa 等<sup>[103]</sup>在微环阵列中研究了光子局域相互作用形成的等效磁场,这里的耦合是基

于相邻微环不同角坐标模式之间的耦合,如图 9(a)所示,这个设计的独特之处在于其形成的合成维度

是连续的坐标而不是离散的晶格,光子间的相互作用在沿着合成维度上是局域的。

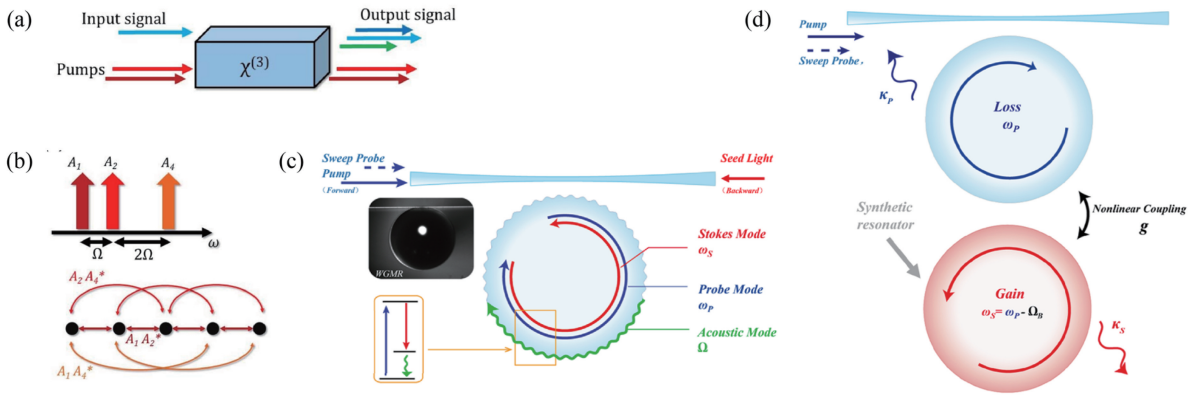


图 8 利用非线性光学效应构造合成频率维度。(a)三阶非线性波导中的四波混频布拉格散射<sup>[98]</sup>; (b)多种频率的泵浦光(上),引起了信号光在合成频率晶格上的多种耦合系数(下)<sup>[98]</sup>; (c)微腔中的非线性布里渊散射<sup>[101]</sup>; (d)合成频率维度的 PT 对称<sup>[101]</sup>

Fig. 8 Using nonlinear optical effects to create synthetic frequency dimension. (a) Four-wave mixing Bragg scattering in third-order nonlinear waveguide<sup>[98]</sup>; (b) with multiple pumps present (up), evolution of the signal (down) is governed by multiple hopping coefficients across synthetic frequency lattice<sup>[98]</sup>; (c) nonlinear Brillouin scattering in a microcavity<sup>[101]</sup>; (d) synthetic PT symmetry along the frequency dimension<sup>[101]</sup>

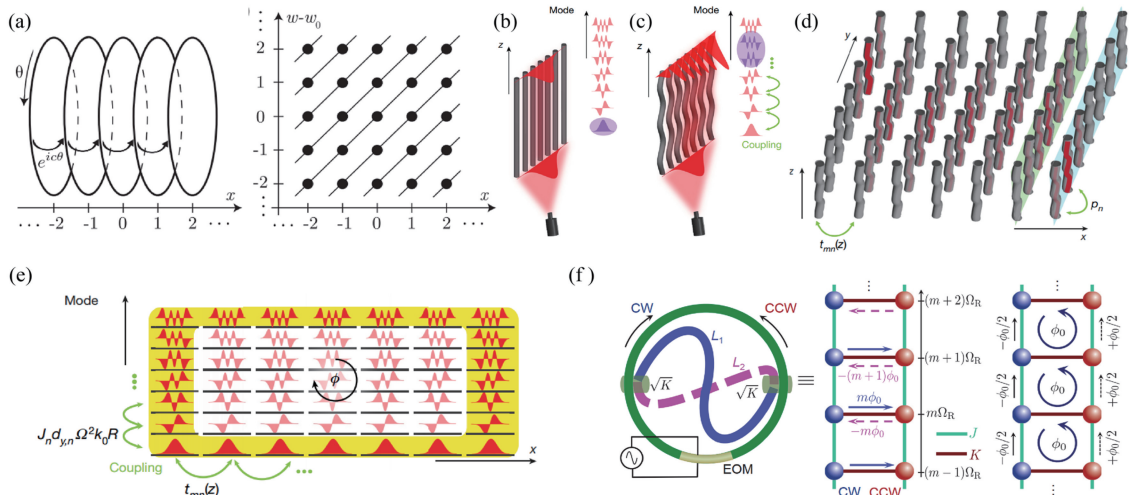


图 9 合成模式维度。(a)  $x-\theta$  平面(左)以及对应的  $x-w$  (OAM)平面(右)的耦合示意图<sup>[103]</sup>; (b)一维直波导阵列,本征模式的传播常数等距分布<sup>[104]</sup>; (c)将波导阵列沿纵向振荡,本征模与其最近邻模式耦合,形成基于模式的晶格<sup>[104]</sup>; (d)二维波导阵列<sup>[104]</sup>; (e)图(d)对应的合成空间的晶格<sup>[104]</sup>; (f)调制的谐振环,存在顺时针模式和逆时针模式之间的耦合,以及相应的合成维度的晶格<sup>[105]</sup>

Fig. 9 Synthetic modal dimension. (a) Coupling diagram of  $x-\theta$  plane (left) and corresponding  $x-w$  (OAM) plane (right)<sup>[103]</sup>; (b) one-dimensional lattice with a spectrum of eigenmodes with equally spaced propagation constants<sup>[104]</sup>; (c) oscillating the lattice in the longitudinal direction causes each eigenmode to couple to its nearest neighbours, forming a lattice of coupled modes<sup>[104]</sup>; (d) a two-dimensional lattice of waveguides<sup>[104]</sup>; (e) synthetic-space lattice corresponding to Fig. (d)<sup>[104]</sup>; (f) a modulated ring resonator with CW-CCW mode-coupling and its corresponding lattice in synthetic dimensions<sup>[105]</sup>

2019 年, Lustig 等<sup>[104]</sup>创新性地提出了用波导阵列的不同模式之间的耦合来构造合成维度的方

法。考虑沿  $y$  轴分布的一维耦合波导阵列,波导数目为  $N$ ,传播方向沿  $z$  轴方向。显然,此波导阵列



有  $N$  个本征模式,每个本征模对应不同的传播常数。通过特殊的波导排布使得这  $N$  个模式的传播常数等间距分布,从而形成了一个等间距的模式梯子[图 9(b)]。然而,在平直的波导阵列中,这  $N$  个模式不会相互耦合。为了使波导阵列的不同模式之间产生耦合,他们将波导阵列沿纵向振荡起来。振荡周期  $\Omega$  经特殊设计,使得相邻传播常数的模式能够耦合,由此构造出的合成维度就是基于波导阵列模式的合成维度[图 9(c)]。在此基础上,将多个 1D 波导阵列沿  $x$  轴排列[图 9(d)],这样  $x$  方向的空间维度结合波导阵列的模式维度形成了一个二维合成空间[图 9(e)]。Lustig 等在相邻的波导阵列中加入相移,等效成在合成空间引入有效磁场,构造出了光学拓扑绝缘体,并在实验上观测到了拓扑边界态。

2020 年,Dutt 等<sup>[105]</sup>提出能同时支持两个独立的合成维度的谐振环,一个维度是频率,由电光调制器控制不同频率的耦合;另一个维度是赝自旋维度,相同频率下顺时针和逆时针的模式代表两种赝自旋,它们之间的耦合由 8 字型的定向耦合器控制,如图 9(f)所示。在这个合成的二维空间中,霍尔梯子晶格被清晰地展现,与之对应的一些重要物理现象也在实验中得以验证,例如等效的自旋轨道耦合、光场的等效磁场、自旋-动量锁定、Meissner-to-vortex 相变以及拓扑单向边界流。这个工作是之前介绍的 Yuan 等<sup>[81]</sup>方

案的变体,将其中的 OAM 维度换成了赝自旋维度以便于实验,同样也是由 0 维结构构建出二维的合成空间,大大丰富了合成维度概念的应用前景。

### 2.4 利用特殊变换

上文介绍了 Yuan 等<sup>[57]</sup>在谐振环体系下,通过选取特定的动态调控,以及考虑长程耦合后,理论上任意维度的晶格均可实现。然而,要达到更高维的目标,需要结合长程耦合对整个高维合成空间实现完美的、一对一的复现,因此无法避免地会导致体系的复杂程度呈指数增长。有研究者提出,利用特殊变换并通过特殊设计最近邻耦合及在位能解谐,能够用一维的晶格等效实现任意高维的晶格,不需要动态调控构造长程耦合。

2016 年,Yu 等<sup>[106]</sup>基于 Householder 变换,利用不同维度的哈密顿量之间的数学相似性,将高维的光学网络变换到一维上[图 10(a)]。通过这种变换,高维的长程耦合能够简化成一维的近邻耦合,变换后一维晶格的每个格点代表了初始高维晶格格点的复杂叠加,并且能复现高维结构的光谱信息。2019 年,Maczewsky 等<sup>[107]</sup>利用 Lanczos 方法提出对任意厄米的多维格点,不管是局域耦合还是非局域耦合分布,都可以映射成一个一维晶格,且变换前后相应的格点是一一对应的。此一维晶格的最近邻耦合以及在位能需要特殊设计。图 10(b)为一个四维的超立方晶格的三维投影,将这个网络映射到

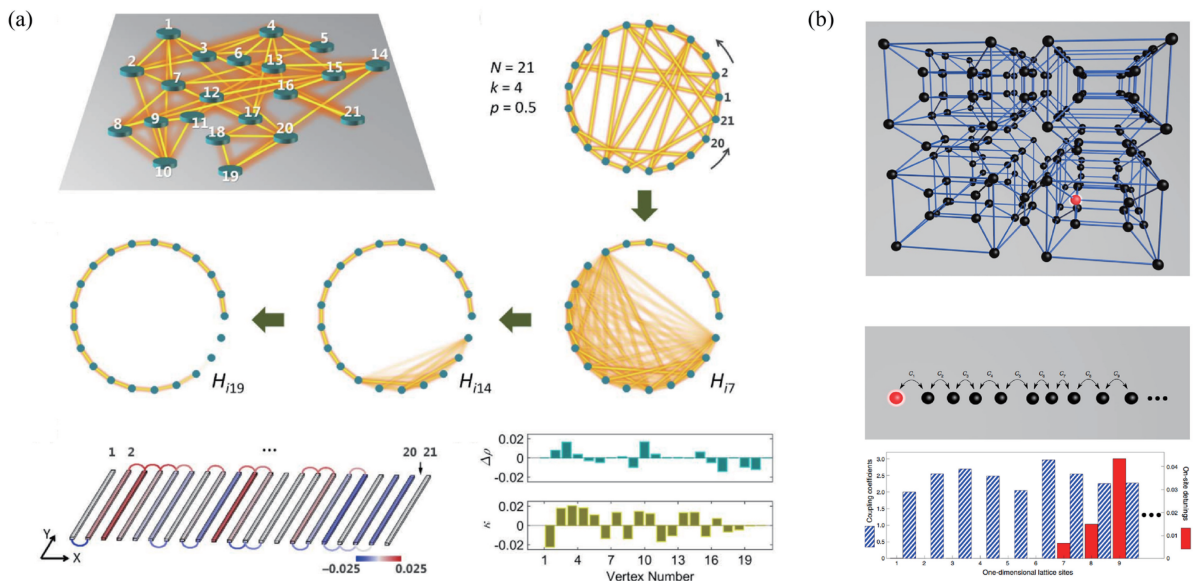


图 10 将多维网络映射到一维晶格。(a)基于哈密顿量相似性的高维网络的一维变换结构<sup>[106]</sup>;

(b)将高维网络映射到一维晶格<sup>[107]</sup>

Fig. 10 Mapping multi-dimensional networks to 1D lattices. (a) 1D transformation structure of high-dimensional network based on similarity of Hamiltonian<sup>[106]</sup>; (b) mapping high-dimensional networks to 1D lattices<sup>[107]</sup>

一维,选定激发的格点(图中红点)后,这个一维晶格格点间的最近邻耦合以及需要调整的在位能就能计算出来,如柱状图所示。由此,高维晶格中激发某个特定格点后体系的演化,能完美映射到一维晶格激发对应格点后的演化上。此方法将任意高维晶格投影到一维晶格上,通过调控一维晶格的耦合系数和在位能,可以一一对应地反映高维的物理。

### 2.5 利用多脉冲

构造光学人工晶格的另外一种方式是利用时间

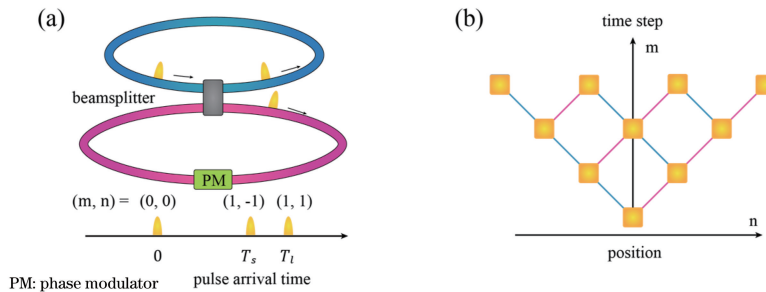


图 11 利用多个时域脉冲构造人工光学晶格。(a)两个长度略微不等的光纤回路,由 50/50 的耦合器连接;

(b)等效随时间演化( $m$ )的晶格( $n$ )网络

Fig. 11 Using multiple pulses to create synthetic photonic lattice. (a) Two fiber loops with slightly different lengths connected by a 50/50 coupler; (b) an equivalent lattice network that describes a one-dimensional synthetic lattice ( $n$ ) evolves along the time axis ( $m$ )

有趣的是,每个脉冲的到达时间可以重新解释为沿着合成维度的位置索引。对于短(长)回路上某个特定位置的在时刻  $t_0$  的脉冲,经过一个短(长)的回路之后,它会在时刻  $t_0 + T - \Delta T$  ( $t_0 + T + \Delta T$ ) 回到相同的位置。假设在时刻  $t = mT + n\Delta T$ ,两束脉冲  $u_{n+1}^m, v_{n+1}^m$  分别到达短回路和长回路的耦合器输入端。其中,  $m$  为脉冲在任一回路总的往返次数,  $n$  为脉冲走长回路的次数减去走短回路的次数。随着光的传播,  $m$  会增加以记录随后增加的往返次数,而  $n$  可以增加或减少,取决于光走的是哪一个回路。于是,  $m$  可以重新解释为一个持续增加的离散时间步数,而  $n$  为一个离散的位置索引。以短回路中的脉冲为例,一旦它经过耦合器,就会在短回路产生一个输出的脉冲,这个输出脉冲又会在走完一个短回路后产生新的脉冲,如此往复。另一方面,长回路中的脉冲经过耦合器也会在短回路产生相应的脉冲。于是,对短回路的  $u_n^{m+1}$  可表示为

$$u_n^{m+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{n+1}^m + i v_{n+1}^m). \quad (3)$$

在长回路中,有一个额外的相位调制器,则  $v_n^{m+1}$  可表示为

$$v_n^{m+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i u_{n-1}^m + v_{n-1}^m) \exp[i\phi(n)]. \quad (4)$$

自由度,将一系列脉冲的演化映射到一个粒子沿离散晶格的动力学上<sup>[108-110]</sup>。例如,考虑两个不同长度的光纤回路,它们由一个 50/50 的耦合器连接[图 11(a)]。一个光脉冲入射进一个回路后会被耦合器分成两个脉冲,一个围绕长回路,另外一个围绕短回路。分束后,光围绕长短回路走一圈又回到耦合器,时间分别是  $T_l$  和  $T_s$ ,时间差  $T_l - T_s = 2\Delta T$ ,平均时间  $(T_l + T_s)/2 \equiv T$ ,然后再次被耦合器分束,如此往复。

以上两个公式用到了耦合器的散射矩阵以及考虑了相位调制器的作用。设定调制周期为  $T$ ,这样含时的传输相位仅取决于  $n$ 。于是,这两个公式描述了一个粒子在一维人工晶格(由  $n$  标志)上随时间的运动(沿  $m$  轴)[图 11(b)]。

2011 年,Regensburger 等<sup>[111]</sup>采用此模型,将相位调制设为 0,非常方便地实现了量子行走和连续波导阵列里光的弹道传播;加入随位置线性变化的相移,可以实现离散时间的光学布洛赫振荡。此外,相比于一般的波导阵列体系,此系统在时间和位置上都是离散的,从而能够方便地、选择性地控制传播过程中的相位和损耗。既然此系统能够方便地控制损耗,自然而然地,人们也想到将增益引入其中,从而可以研究光子学中的 PT 对称性<sup>[112-114]</sup>。

基于耦合光纤环这个体系,人们实现了对多种现象的模拟和应用。2017 年,Wimmer 等<sup>[115]</sup>基于耦合光纤环系统在合成时间及空间维度上的离散性,能够在合成空间观察到高分辨的波包动态演化,从而在实验上直接测量出了周期系统的贝里曲率。同年,Vatnik 等<sup>[116]</sup>在其中一个光纤环中加入随机相位,实现了合成时间维度上的安德森局域。2018 年,Wang 等<sup>[117]</sup>在这种耦合光纤环 PT 对称的体系

中,调整输入脉冲序列的周期,在时间域实现了泰保效应的自成像现象。

除了上述介绍的在合成的一维时间维度基础上研究的一系列物理现象外,若结合脉冲不同的到达时间,这种基于时间多路复用的方法能够拓展到更多的维度。2012 年,Schreiber 等<sup>[118]</sup>利用一个光纤网络系统[图 12(a)]模拟了二维的光学量

子行走,实现了二体系统给定条件的纠缠态的产生。2018 年,Chen 等<sup>[119]</sup>基于 time-bin 编码的光纤回路体系也成功实现了与合成二维晶格的映射[图 12(b)],利用时间离散的二维量子行走研究了二维周期驱动系统独特的非平庸拓扑效应:在陈数消失的 Floquet 拓扑绝缘体<sup>[63]</sup>界面上能够存在手性边界态。

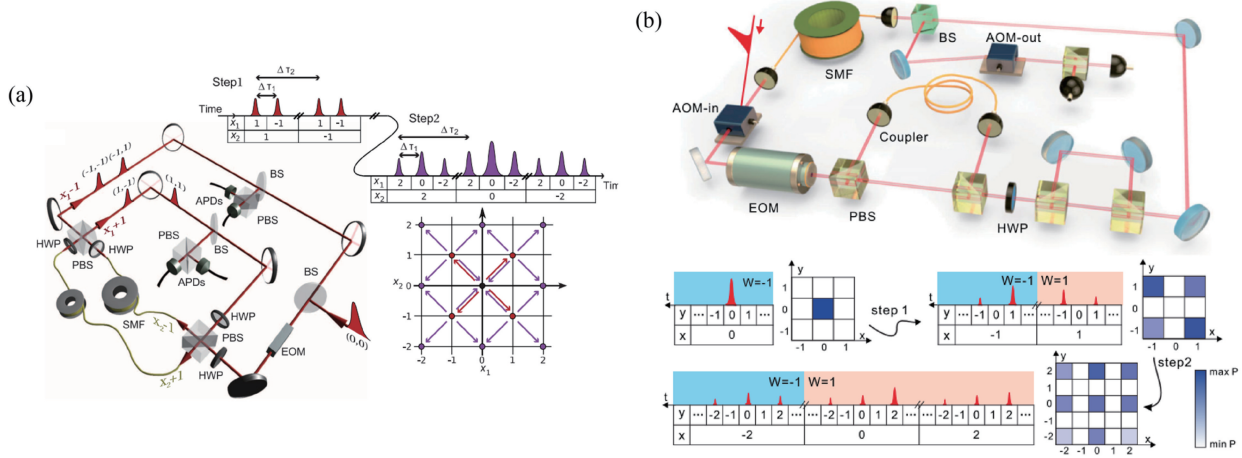


图 12 利用多个脉冲实现二维量子行走。(a) 二维量子行走实验设计<sup>[118]</sup>;

(b) time-bin 编码的二维量子行走实验设计以及其与合成二维晶格的映射<sup>[119]</sup>

Fig. 12 Using multiple pulses to realize 2D quantum walks. (a) Experimental setup of a 2D quantum walk<sup>[118]</sup>;

(b) experimental implementation of 2D quantum walks with time-bin encoding and the mapping between the time-bin sequence and the 2D spatial lattice<sup>[119]</sup>

对第二部分做个总结,光子学为构造人工晶格创造了无限可能,其基本思想就是设计各种光子态之间特定的耦合。光子所具有的多种自由度,以及各种光子态之间的耦合机制,为人工晶格的实现提供了广阔的平台。

从构造人工晶格的要素上来说,在光子学中,在合成维度上形成的分立晶格的数目可以非常大。例如,对于谐振环系统,由于调制频率通常远远小于模式的共振频率,将上百个不同的模式耦合起来也是有可能的。因此,基于合成维度而形成的较大合成空间非常适合用来对一些体块物理效应进行模拟和证明。除了之前介绍通过近邻耦合的紧束缚模型所实现的诸多现象,光子态的长程耦合可用来构造拓扑平带<sup>[120-121]</sup>,用以研究多体物理,包括分数量子霍尔效应<sup>[122]</sup>。Qin 等<sup>[123]</sup>提出加入长程耦合可以对能带进行任意设计,利用锯齿、三角、半圆的波形调控,构造出了线性、双线性、半圆的能带结构,从而实现了定向、双向、全向的频率维度的离散衍射,在此基础上,超透镜和离散泰保效应也得以完成。还有报道称,在不打破时间反演对称的情况下,在二维系统

实现了单个狄拉克锥<sup>[124]</sup>。此外,在合成维度上也能便捷地引入边界,如前面所介绍的,可以调制谐振环或者波导的群速度色散,或者利用记忆效应设计特别的边界<sup>[31]</sup>。

在上述介绍中可以看到,光学人工晶格的一个重要的应用优势在于等效规范势的构造<sup>[125-127]</sup>。众所周知,规范势对应的电场和磁场为控制带电粒子的运动提供了多种机制。而光子是中性粒子,因此没有天然存在的规范场可以耦合光子。然而,在构造光子人工晶格的过程中,能够自然地实现一个对光子的等效规范势。例如,对一个二维紧束缚晶格,其哈密顿量  $H = g \sum_{\langle i,j \rangle} \{ \exp[-i\phi_{ij}(t)]c_i^\dagger c_j + \exp[i\phi_{ij}(t)]c_j^\dagger c_i \}$ , 其中,  $\phi_{ij}$  是格点  $i$  和  $j$  之间的耦合相位。定义这样一个关联:  $\int_i^j A \cdot dr = \phi_{ij}$ ,  $A$  就是对光子的等效规范势,穿过一个元格的等效磁场就能定义为  $B = \frac{1}{S} \oint A \cdot dr$ , 其中  $S$  为元格面积<sup>[126]</sup>。若  $\phi_{ij}(t)$  含时,还能定义对光子的等效电场  $E = -\partial A / \partial t$ <sup>[127]</sup>。如前面所述,构造光学人工晶格的各

种方法天然具备了控制晶格间耦合相位的能力,因此非常适合用来产生对光子的等效规范势,用以灵活地操纵光子,在合成空间实现诸如单向拓扑保护边界态、布洛赫振荡<sup>[128-129]</sup>等现象。

人工光学晶格的另一大优势在于对拓扑物理学的研究提供了丰富的实现方法。拓扑物理学的效应非常依赖于物理系统的维数。高维系统往往比低维系统具有更丰富的、独一无二的特性,但所需的光学结构却受制于复杂困难的实验加工。合成维度的出现,为实现这些高维系统提供了巧妙的低维替代体系,甚至能超出现实的三个维度,研究四维或更高维的物理效应。

光学人工晶格为研究基础的物理效应提供了广阔的平台。通过控制光在人工晶格上的传播,人们能够调控光的特性,对实际应用有着重要的价值。

### 3 参数空间的合成维度

#### 3.1 物理概念

与通过构造人工晶格的方法形成合成维度不同,另外一种构造合成空间的通用方法是利用参数自由度。考虑一个物理系统,其哈密顿量  $H(q)$  依赖于一个连续变量  $q$ 。这种系统的参数依赖性可表述为在合成空间有一个  $q$  轴,以之作为原本物理空间之外的额外维度。利用这种方法,高维空间的物理得以通过低维物理系统的参数依赖性体现。

这种带有参数轴的合成空间也能自然地引出规范势的概念以及实现相应的物理效应。举一个简单的例子,考虑一个参数空间中的哈密顿量,它由二维矢量  $\mathbf{R}$  来描述,满足薛定谔方程<sup>[130-131]</sup>:

$$H(\mathbf{R})|\Psi(\mathbf{R})\rangle = E(\mathbf{R})|\Psi(\mathbf{R})\rangle. \quad (5)$$

假设  $\mathbf{R}$  变化时,希尔伯特空间不变。考虑  $\mathbf{R}$  空间的一个闭合曲线,沿这条闭合回路可以定义贝利相位  $\gamma$ ,

$$\gamma = \oint i \langle \Psi(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | \Psi(\mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{R}. \quad (6)$$

这里的积分核给出了贝里联络,或者说参数空间的规范势为

$$A(\mathbf{R}) = i \langle \Psi(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | \Psi(\mathbf{R}) \rangle. \quad (7)$$

由斯托克斯定理,可以得到贝里曲率为

$$B(\mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} \times A(\mathbf{R}). \quad (8)$$

上述方式是常见的对一个二维能带结构的拓扑描述,只需要将  $\mathbf{R}$  对应成波矢  $\mathbf{k}$ <sup>[132-134]</sup>。由于波矢定义在第一布里渊区,对  $B$  场积分就能得到量子化的能带陈数。然而,更重要地,人们发现能带结构的拓

扑论证实际上能够拓展到对任意参数的依赖性上。进一步地,若参数能随时间绝热演化,则这样一个含时系统的动力学就有了高维拓扑物理的特征。接下来我们对这些方面举一些具体的例子。

#### 3.2 参数空间的非平庸拓扑

由参数哈密顿量描述的系统,人们首先想到使参数随时间改变来研究高维的物理系统,即考察含时参数系统的动力学问题。

这里以 Aubry-André 模型<sup>[135]</sup>为例,它描述了一维周期势场下的紧束缚晶格,

$$H = \sum_m g (a_m^\dagger a_{m+1} + a_m^\dagger a_{m-1}) + \sum_m a_m^\dagger a_m V \cos(2\pi b m + \phi), \quad (9)$$

式中:  $a_m^\dagger (a_m)$  为第  $m$  个格点的产生(湮灭)算符;  $g$  为耦合强度;  $V$  为在位势的幅度;  $b$  和  $\phi$  分别为在位势相对于格点位置的调控参数。若  $b$  为无理数,则  $H$  没有周期性,此时它描述一个准晶。若将  $\phi$  看作一个合成维度, Aubry-André 模型就可以描述一个合成的二维空间。之前(2)式的哈密顿量描述了处于均匀磁场朗道规范下的一个二维正方晶格模型,是一个量子霍尔效应的系统,实际上, Aubry-André 模型与之关系紧密。由于 Aubry-André 模型能在一维的晶格系统中反映出一些二维量子霍尔效应的物理性质,因此近期它在凝聚态物理领域得到了广泛的关注。式中,  $b$  对应于二维模型每个元胞的磁场,  $\phi$  对应于沿周期方向的波矢  $\mathbf{k}_y$  (选取合适的朗道规范)。因此,对一个有限的结构, Aubry-André 模型的本征能谱出现能隙。对于某些特殊的  $\phi$  值,带隙中出现了边界态,其本征频率随  $\phi$  的变化直接对应于量子霍尔系统单向边界态的色散。

在有限大小的 Aubry-André 模型中,假设在时刻  $t$ , 系统处于一个边界态,位于一维格点的其中一个边界,将  $\phi$  随时间绝热演化后,这个模式也会根据边界态的色散进行演化,最终变成一个体态,之后又以另一个边上的边界态出现。因此,这个一维含时系统物理态的绝热演化给相应的二维系统提供了一个直接的观测手段。

2012 年, Kraus 等<sup>[136]</sup>提出了对这样一个边界态绝热演化的直接实验证明。为此,他们对 Aubry-André 模型做了两个重要的调整,其一,将 Aubry-André 模型中与格点有关的调制,反映在对最近邻格点之间的耦合常数的调控上。其二,他们考虑了一个波导阵列,用其沿  $z$  轴传播的场振幅的变化来模拟随时间的演化。根据这些设定,他们设计了波

导间距随传播方向变化的波导阵列结构,其中  $\phi$  作为  $z$  的函数从  $0.35\pi$  变到  $1.75\pi$ 。图 13(a)展示了它的绝热演化过程,入射光初始激发波导阵列一边

上的边界态沿  $z$  轴传播后演化成体态,最后又变成另一个边上的边界态,与 Aubry-André 模型预期的绝热演化效果完全一致。

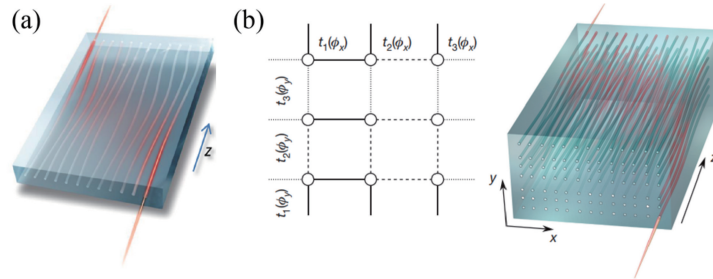


图 13 绝热泵浦。(a)通过拓扑保护的边界态观察绝热泵浦效应的设计<sup>[136]</sup>;  
(b)二维波导阵列图,波导间距  $z$  相关<sup>[137]</sup>

Fig. 13 Adiabatic pumping. (a) Sketch of setup for observation of adiabatic pumping via topologically protected boundary states<sup>[136]</sup>; (b) illustration of the 2D array of waveguides with  $z$ -dependent spacing<sup>[137]</sup>

2018 年,Zilberberg 等<sup>[137]</sup>将此系统拓展到二维的波导阵列,如图 13(b)所示, $\phi_x$  和  $\phi_y$  分别控制两个方向上的耦合,且都是  $z$  的函数,由此构成了 2 个合成维度  $v, w$ ,再加上原本的  $x, y$  空间维度,形成了一个四维合成空间。耦合系数随  $z$  的调控可映射到  $x-v$  平面和  $y-w$  平面的等效磁场,再将这两个平面耦合起来,实现了四维的量子霍尔效应,特征是带隙有着非平庸的第二陈数。在实验上可观测到角态、边界态沿  $z$  轴传播跨越整个样品后依然保持。

参数绝热演化的运用为研究高维的物理系统提供了强有力的方法。基于波导阵列的体系平台,这种方法还被用来在实验上研究拓扑相变<sup>[138]</sup>。在一维 Aubry-André 模型中,若  $b$  是无理数,则其与二维模型的对应,实际上可以映射到低维空间的准晶与高维空间的晶体结构的对应。有文献基于这种对

应关系研究了光学准晶的计算工具<sup>[139]</sup>。

另一方面,人们也提出可以直接改变物理结构的几何参数来反映高维物理的性质。

2017 年,Wang 等<sup>[140]</sup>考虑一个一维的光子晶体,每个原胞包含四层平板[图 14(a)],厚度分别是  $(1+p)d_a, (1+q)d_b, (1-p)d_a$  和  $(1-q)d_b$ ,其中  $p, q$  就是特别引入的结构参数。在  $k$  (一维物理空间波矢)、 $p, q$  形成的三维空间中,Wang 等验证了合成参数空间外尔点的存在,并实验验证了外尔点所带来的参数空间的光学涡旋。这篇工作的亮点在于可以用这个简单的一维结构研究三维的外尔点的物理性质。类似地,2019 年,Fan 等<sup>[141]</sup>在一维四层声子晶体中引入 2 个结构参数,同样构造了三维的合成空间,在实验上观察到了外尔点,并探测到外尔点相关的、新奇的反射相位奇点。

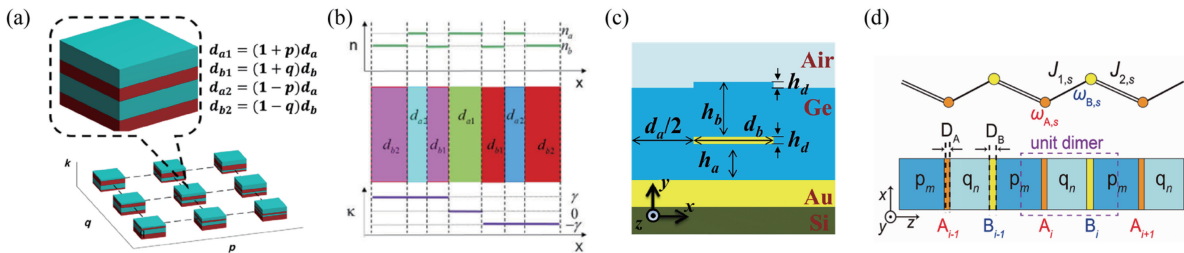


图 14 参数依赖的系统。(a)一维光子晶体,原胞包含四层厚度不同由参数  $p, q$  控制的平板<sup>[140]</sup>;(b)PT 对称七层平板原胞的光子晶体设计, $n$  和  $\kappa$  分别表示折射率的实部和虚部<sup>[142]</sup>;(c)非厄米超构晶体原胞图示<sup>[143]</sup>;(d)拓扑界面态的超晶格(下)以及相应的等效二聚体模型(上)<sup>[144]</sup>

Fig. 14 Systems with parameter dependency. (a) 1D photonic crystal with each unit cell including four layers where the thickness of each layer depends on parameters  $p$  and  $q$ <sup>[140]</sup>; (b) the design of photonic crystal with a PT-symmetric seven-layer unit cell,  $n$  and  $\kappa$  represent real and imaginary part of refractive index of each layer, respectively<sup>[142]</sup>; (c) schematic of the unit cell of the non-Hermitian metacrystal<sup>[143]</sup>; (d) the superlattice of topological interface modes (down) and the schematic representation of effective dimerized model (up)<sup>[144]</sup>

2020 年, Wang 等<sup>[142]</sup> 在之前工作的基础上, 将一维 PT 对称光子晶体的非厄米性当作一个合成参数, 研究了四维非厄米合成空间中的拓扑物理。他们考虑了原胞内包含 7 层平板且引入了增益和损耗的光子晶体, 如图 14(b) 所示, 单元里有 4 种不同的厚度:  $d_{a1} = [1 + \cos(p\pi)]d_a$ 、 $d_{b1} = [1 + \cos(q\pi)]d_b/2$ 、 $d_{a2} = [1 - \cos(p\pi)]d_a/2$ 、 $d_{b2} = [1 + \cos(q\pi)]d_b/2$ , 其中  $p$ 、 $q$  为引入的结构参数。此外, 这 7 层结构折射率的实部被设计成镜像对称, 而折射率虚部的分布则是镜像反对称的, 用以形成 PT 对称结构, 他们引入了另外一个参数  $\gamma$  (折射率虚部的大小) 来控制系统的非厄米性质。于是, 3 个参数  $p$ 、 $q$ 、 $\gamma$  再加上布洛赫波矢  $k$ , 构成了四维的合成空间。在考虑非厄米参数  $\gamma$  后, 原本的结线演变成了参数空间中包裹结线的奇异环, 将空间分成了 PT 对称相和破缺相。当调控  $\gamma$  后, 他们在合成空间实现了三维的奇异超曲面, 发现了奇异超曲面上的两类奇异简并点, 在其中一类简并点附近, 可以产生高 Q 值的窄带反射峰。一旦环境微小的变化破坏了系统的 PT 对称性, 反射系数就会发生剧烈的变化, 该特性在光学传感上有潜在应用。

2020 年, Zhong 等<sup>[143]</sup> 通过调控一维非厄米超构晶体单元的顶层厚度  $h_b$  这一结构参数 [图 14(c)], 可以让色散的带隙先闭合再打开, 在某一特定的厚度时会出现一组奇异点, 而在特定厚度两侧则会出现带边模式对称性的反转。在由结构参数  $h_b$  和布洛赫波矢  $k$  构成的二维合成空间中, 他们发现了连续体中的束缚态和非厄米的费米弧。如果再考虑另一个结构参数  $h_a$  的变化 [图 14(c)], 在形成的三维合成空间中, 奇异点将会形成奇异线。此系统能够方便地调控热辐射。

2020 年, Hu 等<sup>[144]</sup> 在一维光学拓扑界面态的超晶格结构中引入两个结构参数, 如图 14(d) 所示, 其中一个参数用来调整界面层介质的厚度以调节在位能, 另一个参数控制相邻界面态之间的光子晶体周期数, 以调节耦合系数 (包括强度和符号)。这两个与在位能和耦合系数相关的结构参数, 结合原本的一维布洛赫波矢形成了三维合成空间。基于此系统, 他们考虑了光子的横电 (TE) 和横磁 (TM) 两种偏振模式, 首次成功构造了可见光频域的 charge-2 狄拉克点, 改变入射角后还能使该 charge-2 狄拉克点在合成空间分裂成两个外尔点, 并实现了对其所引起的拓扑表面态的灵活调控。

2018 年, Lu 等<sup>[145]</sup> 在三维的磁性外尔光子晶体

中加入螺旋调制的角度这一结构参数, 构造出四维的合成空间。他们通过对外尔光子晶体的螺旋调制, 耦合并湮灭了外尔点, 从而得到三维拓扑带隙, 分开了正反传播的光子通道。螺旋调制在空间拉出一条拓扑线缺陷, 可用作单向传输光纤的芯层, 与传统光纤不同, 在单向光纤中光信号可以无散射地绕过任意形状的杂质或缺陷。与二维拓扑光子晶体的单向边缘态 (不变量是二维空间的第一陈数) 的拓扑原理不同, 单向光纤的拓扑不变量是四维参量空间的第二陈数。

## 4 结束语

本文综述了拓扑光学体系中合成维度的进展。近些年来, 合成维度成为了飞速发展的领域, 它的核心思想在于选择合适的自由度耦合起来, 以模拟粒子沿此额外维度的运动。合成维度与光子学中规范场以及拓扑概念的发展密切相关。它提供了构造晶格哈密顿量的新方法, 能够在低维的物理系统中实现高维的等效模型。

构造合成维度的方法大体上分为两类。一类方法是构造人工晶格, 需要选择合适的光子态, 再通过巧妙的机制将这些光子态耦合起来。光子的多种自由度以及耦合机制为人工晶格的实现提供了丰富的选择, 本文介绍了基于光子的 OAM、频率、时域脉冲等自由度, 相应的耦合机制有空间光调制器、电光调制器、非线性效应、分束器等。光子的 OAM、频率自由度对应的光子态可利用数目很多, 且可以精确调控和测量, 甚至可以相互结合<sup>[81]</sup>。对于 OAM、频率这两个自由度, 一方面基于其所形成的较大合成空间, 非常适合用来对一些体块物理效应进行模拟和证明, 另一方面为其在量子信息、信息存储、光通信以及全光器件上的应用提供了重要的资源。此外, 其对应的系统也能方便地引入长程耦合, 进一步丰富体系的维度以及降低探索高维物理的实验难度。光子不同时域的脉冲, 非常适合探索量子行走、量子关联等物理效应。所基于的耦合光纤环体系, 在离散晶格的控制上更加灵活, 能够非常方便地对系统加入损耗或者增益, 因此也非常适合用来研究 PT 物理。

另一类方法是额外引入系统的参数, 这些额外的参数均可当作与空间坐标同等位置的维度。本文介绍了对参数进行绝热演化, 利用其随时间的变化引入合成维度, 或者改变物理结构的几何参数, 通过不同参数的多个样品的变化引入合成维度, 系统对

这些参数的依赖可以反映至其拓扑能带结构上。此外,由于一些合成参数不受周期性条件的限制,合成空间的物理往往还会有其独有的性质。

合成维度的引入,可以增加系统维度、降低实验难度、增加系统可控性。现已有大量基于合成维度的设想和实验被提出。今后一个重要的研究方向在于理解各种方案的优势和局限性,并且做进一步的改善。例如,绝大多数的方案沿合成维度方向是离散的自由度,而模拟连续维度中的物理是比较困难的;模拟粒子间相互作用的模型很多,而缺少对局域相互作用的模型探索。

研究合成维度起初的动机是想在光子学领域开发一种方法来研究各种重要的基础物理效应,特别是一些重要的拓扑物理效应。正如本文中所介绍的,已经有显著的物理效应通过合成维度的方法在理论以及实验上得以证明,我们同样期望合成维度能发展到实际应用上去,为操纵和控制光子的基本性质提供可能。

### 参 考 文 献

- [1] Ward J, Benson O. WGM microresonators: sensing, lasing and fundamental optics with microspheres [J]. *Laser & Photonics Reviews*, 2011, 5(4): 553-570.
- [2] Feng S, Lei T, Chen H, et al. Silicon photonics: from a microresonator perspective [J]. *Laser & Photonics Reviews*, 2012, 6(2): 145-177.
- [3] Kawachi M. Silica waveguides on silicon and their application to integrated-optic components [J]. *Optical and Quantum Electronics*, 1990, 22(5): 391-416.
- [4] Joannopoulos J D, Villeneuve P R, Fan S H. Photonic crystals: putting a new twist on light [J]. *Nature*, 1997, 386(6621): 143-149.
- [5] Soukoulis C M, Wegener M. Past achievements and future challenges in the development of three-dimensional photonic metamaterials [J]. *Nature Photonics*, 2011, 5(9): 523-530.
- [6] Liu Y, Zhang X. Metamaterials: a new frontier of science and technology [J]. *Chemical Society Reviews*, 2011, 40(5): 2494-2507.
- [7] Yuan L Q, Lin Q, Xiao M, et al. Synthetic dimension in photonics [J]. *Optica*, 2018, 5(11): 1396.
- [8] Ozawa T, Price H M, Amo A, et al. Topological photonics [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2019, 91(1): 015006.
- [9] Ozawa T, Price H M. Topological quantum matter in synthetic dimensions [J]. *Nature Reviews Physics*, 2019, 1(5): 349-357.
- [10] Kikuchi K. Fundamentals of coherent optical fiber communications [J]. *Journal of Lightwave Technology*, 2016, 34(1): 157-179.
- [11] Boada O, Celi A, Latorre J I, et al. Quantum simulation of an extra dimension [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 108(13): 133001.
- [12] Kraus Y E, Zilberberg O. Topological equivalence between the Fibonacci quasicrystal and the Harper model [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(11): 116404.
- [13] Mei F, Zhu S L, Zhang Z M, et al. Simulating  $Z_2$  topological insulators with cold atoms in a one-dimensional optical lattice [J]. *Physical Review A*, 2012, 85: 013638.
- [14] Gómez-León A, Platero G. Floquet-Bloch theory and topology in periodically driven lattices [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(20): 200403.
- [15] Ganeshan S, Sun K, Das Sarma S. Topological zero-energy modes in gapless commensurate Aubry-André-Harper models [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(18): 180403.
- [16] Xu Z H, Li L H, Chen S. Fractional topological states of dipolar fermions in one-dimensional optical superlattices [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(21): 215301.
- [17] Kraus Y E, Ringel Z, Zilberberg O. Four-dimensional quantum Hall effect in a two-dimensional quasicrystal [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111(22): 226401.
- [18] Celi A, Massignan P, Ruseckas J, et al. Synthetic gauge fields in synthetic dimensions [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 112(4): 043001.
- [19] Mei F, You J B, Zhang D W, et al. Topological insulator and particle pumping in a one-dimensional shaken optical lattice [J]. *Physical Review A*, 2014, 90(6): 063638.
- [20] Boada O, Celi A, Rodríguez-Laguna J, et al. Quantum simulation of non-trivial topology [J]. *New Journal of Physics*, 2015, 17(4): 045007.
- [21] Price H M, Zilberberg O, Ozawa T, et al. Four-dimensional quantum Hall effect with ultracold atoms [J]. *Physical Review Letters*, 2015, 115(19): 195303.
- [22] Mancini M, Pagano G, Cappellini G, et al. Observation of chiral edge states with neutral fermions in synthetic Hall ribbons [J]. *Science*, 2015, 349(6255): 1510-1513.
- [23] Stuhl B K, Lu H I, Aycock L M, et al. Visualizing edge states with an atomic Bose gas in the quantum

- Hall regime[J]. *Science*, 2015, 349(6255): 1514-1518.
- [24] Nakajima S, Tomita T, Taie S, et al. Topological Thouless pumping of ultracold fermions[J]. *Nature Physics*, 2016, 12(4): 296-300.
- [25] Lohse M, Schweizer C, Zilberberg O, et al. A Thouless quantum pump with ultracold bosonic atoms in an optical superlattice[J]. *Nature Physics*, 2016, 12(4): 350-354.
- [26] Zeng T S, Zhu W, Sheng D N. Fractional charge pumping of interacting bosons in one-dimensional superlattice[J]. *Physical Review B*, 2016, 94(23): 235139.
- [27] Suszalski D, Zakrzewski J. Different lattice geometries with a synthetic dimension[J]. *Physical Review A*, 2016, 94(3): 033602.
- [28] Taddia L, Cornfeld E, Rossini D, et al. Topological fractional pumping with alkaline-earth-like atoms in synthetic lattices [J]. *Physical Review Letters*, 2017, 118(23): 230402.
- [29] Price H M, Ozawa T, Goldman N. Synthetic dimensions for cold atoms from shaking a harmonic trap[J]. *Physical Review A*, 2017, 95(2): 023607.
- [30] Martin I, Refael G, Halperin B. Topological frequency conversion in strongly driven quantum systems [J]. *Physical Review X*, 2017, 7(4): 041008.
- [31] Baum Y, Refael G. Setting boundaries with memory: generation of topological boundary states in floquet-induced synthetic crystals [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(10): 106402.
- [32] Peng Y, Refael G. Topological energy conversion through the bulk or the boundary of driven systems [J]. *Physical Review B*, 2018, 97(13): 134303.
- [33] Lohse M, Schweizer C, Price H M, et al. Exploring 4D quantum Hall physics with a 2D topological charge pump [J]. *Nature*, 2018, 553(7686): 55-58.
- [34] Shang C, Chen X F, Luo W D, et al. Quantum anomalous Hall-quantum spin Hall effect in optical superlattices[J]. *Optics Letters*, 2018, 43(2): 275-278.
- [35] Chen L C, Wang P J, Meng Z M, et al. Experimental observation of one-dimensional superradiance lattices in ultracold atoms [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(19): 193601.
- [36] Anisimovas E, Raciūnas M, Sträter C, et al. Semisynthetic zigzag optical lattice for ultracold bosons[J]. *Physical Review A*, 2016, 94: 063632.
- [37] Livi L F, Cappellini G, Diem M, et al. Synthetic dimensions and spin-orbit coupling with an optical clock transition[J]. *Physical Review Letters*, 2016, 117(22): 220401.
- [38] Kolkowitz S, Bromley S L, Bothwell T, et al. Spin-orbit-coupled fermions in an optical lattice clock[J]. *Nature*, 2017, 542(7639): 66-70.
- [39] An F A, Meier E J, Gadway B. Direct observation of chiral currents and magnetic reflection in atomic flux lattices [J]. *Science Advances*, 2017, 3(4): e1602685.
- [40] Pelegrí G, Polo J, Turpin A, et al. Single-atom edgelike states via quantum interference [J]. *Physical Review A*, 2017, 95: 013614.
- [41] Graß T, Celi A, Lewenstein M. Quantum magnetism of ultracold atoms with a dynamical pseudospin degree of freedom [J]. *Physical Review A*, 2014, 90(4): 043628.
- [42] Zeng T S, Wang C, Zhai H. Charge pumping of interacting fermion atoms in the synthetic dimension [J]. *Physical Review Letters*, 2015, 115(9): 095302.
- [43] Barbarino S, Taddia L, Rossini D, et al. Synthetic gauge fields in synthetic dimensions: interactions and chiral edge modes[J]. *New Journal of Physics*, 2016, 18(3): 035010.
- [44] Łaacki M, Pichler H, Sterdyniak A, et al. Quantum Hall physics with cold atoms in cylindrical optical lattices[J]. *Physical Review A*, 2016, 93: 013604.
- [45] Strinati M C, Cornfeld E, Rossini D, et al. Laughlin-like states in bosonic and fermionic atomic synthetic ladders[EB/OL]. (2017-06-04) [2020-10-29]. <https://arxiv.org/abs/1612.06682>.
- [46] Jünemann J, Piga A, Ran S J, et al. Exploring interacting topological insulators with ultracold atoms: the synthetic creutz-Hubbard model [J]. *Physical Review X*, 2017, 7(3): 031057.
- [47] Strauch F W, Williams C J. Theoretical analysis of perfect quantum state transfer with superconducting qubits [J]. *Physical Review B*, 2008, 78(9): 094516.
- [48] Tsomokos D I, Ashhab S, Nori F. Using superconducting qubit circuits to engineer exotic lattice systems [J]. *Physical Review A*, 2010, 82(5): 052311.
- [49] Mei F, Xue Z Y, Zhang D W, et al. Witnessing topological Weyl semimetal phase in a minimal circuit-QED lattice [J]. *Quantum Science and Technology*, 2016, 1(1): 015006.
- [50] Bilitewski T, Cooper N R. Synthetic dimensions in the strong-coupling limit: supersolids and pair superfluids[J]. *Physical Review A*, 2016, 94(2): 023630.



- [51] Zhang S C, Hu J. A four-dimensional generalization of the quantum Hall effect[J]. *Science*, 2001, 294 (5543): 823-828.
- [52] Qi X L, Hughes T L, Zhang S C. Topological field theory of time-reversal invariant insulators [J]. *Physical Review B*, 2010, 81(15): 159901.
- [53] Lian B, Zhang S C. Five-dimensional generalization of the topological Weyl semimetal [J]. *Physical Review B*, 2016, 94(4): 041105.
- [54] Lian B, Zhang S C. Weyl semimetal and topological phase transition in five dimensions [J]. *Physical Review B*, 2017, 95(23): 235106.
- [55] Roy R, Harper F. Periodic table for floquet topological insulators[J]. *Physical Review B*, 2017, 96(15): 155118.
- [56] Schwartz A, Fischer B. Laser mode hyper-combs [J]. *Optics Express*, 2013, 21(5): 6196-6204.
- [57] Yuan L Q, Xiao M, Lin Q, et al. Synthetic space with arbitrary dimensions in a few rings undergoing dynamic modulation[J]. *Physical Review B*, 2018, 97(10): 104105.
- [58] Luo X W, Zhou X, Li C F, et al. Quantum simulation of 2D topological physics in a 1D array of optical cavities[J]. *Nature Communications*, 2015, 6: 7704.
- [59] Luo X W, Zhou X, Xu J S, et al. Synthetic-lattice enabled all-optical devices based on orbital angular momentum of light [J]. *Nature Communications*, 2017, 8: 16097.
- [60] Luo X W, Zhang C W, Guo G C, et al. Topological photonic orbital-angular-momentum switch [J]. *Physical Review A*, 2018, 97(4): 043841.
- [61] Sun B Y, Luo X W, Gong M, et al. Weyl semimetal phases and implementation in degenerate optical cavities[J]. *Physical Review A*, 2017, 96: 013857.
- [62] Zhou X F, Luo X W, Wang S, et al. Dynamically manipulating topological physics and edge modes in a single degenerate optical cavity [J]. *Physical Review Letters*, 2017, 118(8): 083603.
- [63] Rechtsman M C, Zeuner J M, Plotnik Y, et al. Photonic floquet topological insulators[J]. *Nature*, 2013, 496(7444): 196-200.
- [64] Jiang T S, Xiao M, Chen W J, et al. Experimental demonstration of angular momentum-dependent topological transport using a transmission line network[J]. *Nature Communications*, 2019, 10: 434.
- [65] Cardano F, D'Errico A, Dauphin A, et al. Detection of Zak phases and topological invariants in a chiral quantum walk of twisted photons [J]. *Nature Communications*, 2017, 8: 15516.
- [66] Wang B, Chen T, Zhang X D. Experimental observation of topologically protected bound states with vanishing Chern numbers in a two-dimensional quantum walk[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(10): 100501.
- [67] Yuan L Q, Fan S H. Bloch oscillation and unidirectional translation of frequency in a dynamically modulated ring resonator[J]. *Optica*, 2016, 3(9): 1014-1018.
- [68] Dutt A, Minkov M, Lin Q, et al. Experimental band structure spectroscopy along a synthetic dimension[J]. *Nature Communications*, 2019, 10 (1): 3122.
- [69] Yuan L Q, Shi Y, Fan S H. Photonic gauge potential in a system with a synthetic frequency dimension[J]. *Optics Letters*, 2016, 41(4): 741-744.
- [70] Lin Q, Xiao M, Yuan L, et al. Photonic Weyl point in a two-dimensional resonator lattice with a synthetic frequency dimension [J]. *Nature Communications*, 2016, 7: 13731.
- [71] Bravo-Abad J, Lu L, Fu L, et al. Weyl points in photonic-crystal superlattices [J]. *2D Materials*, 2015, 2(3): 034013.
- [72] Lu L, Wang Z Y, Ye D X, et al. Experimental observation of Weyl points[EB/OL]. (2015-02-11) [2020-10-29]. <https://arxiv.org/abs/1502.03438>.
- [73] Chen W J, Xiao M, Chan C T. Photonic crystals possessing multiple Weyl points and the experimental observation of robust surface states [J]. *Nature Communications*, 2016, 7: 13038.
- [74] Wang L Y, Jian S K, Yao H. Topological photonic crystal with equifrequency Weyl points[J]. *Physical Review A*, 2016, 93(6): 061801.
- [75] Zhang Y, Zhu Y Y. Generation of Weyl points in coupled optical microdisk-resonator arrays via external modulation[J]. *Physical Review A*, 2017, 96: 013811.
- [76] Lin Q, Sun X Q, Xiao M, et al. A three-dimensional photonic topological insulator using a two-dimensional ring resonator lattice with a synthetic frequency dimension [J]. *Science Advances*, 2018, 4(10): eaat2774.
- [77] Ozawa T, Price H M, Goldman N, et al. Synthetic dimensions in integrated photonics: from optical isolation to four-dimensional quantum Hall physics [J]. *Physical Review A*, 2016, 93(4): 043827.
- [78] Haldane. Model for a quantum Hall effect without Landau levels: condensed-matter realization of the "parity anomaly" [J]. *Physical Review Letters*,

- 1988, 61(18): 2015-2018.
- [79] Jukić D, Buljan H. Four-dimensional photonic lattices and discrete tesseract solitons[J]. *Physical Review A*, 2013, 87: 013814.
- [80] Cai Y, Roslund J, Ferrini G, et al. Multimode entanglement in reconfigurable graph states using optical frequency combs [J]. *Nature Communications*, 2017, 8: 15645.
- [81] Yuan L, Lin Q, Zhang A, et al. Photonic gauge potential in one cavity with synthetic frequency and orbital angular momentum dimensions[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(8): 083903.
- [82] Yang Z J, Lustig E, Harari G, et al. Mode-locked topological insulator laser utilizing synthetic dimensions [J]. *Physical Review X*, 2020, 10: 011059.
- [83] Yuan L Q, Lin Q, Xiao M, et al. Pulse shortening in an actively mode-locked laser with parity-time symmetry [J]. *APL Photonics*, 2018, 3(8): 086103.
- [84] Harris S, McDuff O. Theory of FM laser oscillation [J]. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 1965, 1(6): 245-262.
- [85] McDuff O, Harris S. Nonlinear theory of the internally loss-modulated laser[J]. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 1967, 3(3): 101-111.
- [86] Haus H. A theory of forced mode locking[J]. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 1975, 11(7): 323-330.
- [87] Haus H A. Mode-locking of lasers [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 2000, 6(6): 1173-1185.
- [88] Qin C, Zhou F, Peng Y, et al. Spectrum control through discrete frequency diffraction in the presence of photonic gauge potentials[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(13): 133901.
- [89] Qin C Z, Yuan L Q, Wang B, et al. Effective electric-field force for a photon in a synthetic frequency lattice created in a waveguide modulator [J]. *Physical Review A*, 2018, 97(6): 063838.
- [90] Qin C Z, Wang B, Wong Z J, et al. Discrete diffraction and Bloch oscillations in non-Hermitian frequency lattices induced by complex photonic gauge fields[J]. *Physical Review B*, 2020, 101(6): 064303.
- [91] Lee N R A, Pechal M, Wollack E A, et al. Propagation of microwave photons along a synthetic dimension[J]. *Physical Review A*, 2020, 101(5): 053807.
- [92] Qin C Z, Liu Q J, Wang B, et al. Photonic Weyl phase transition in dynamically modulated brick-wall waveguide arrays [J]. *Optics Express*, 2018, 26(16): 20929-20943.
- [93] Tzuang L D, Soltani M, Lee Y H D, et al. High RF carrier frequency modulation in silicon resonators by coupling adjacent free-spectral-range modes[J]. *Optics Letters*, 2014, 39(7): 1799-1802.
- [94] Wang C, Burek M J, Lin Z, et al. Integrated high quality factor lithium niobate microdisk resonators [J]. *Optics Express*, 2014, 22(25): 30924-30933.
- [95] Zhang M, Wang C, Cheng R, et al. Monolithic ultra-high-Q lithium niobate microring resonator [J]. *Optica*, 2017, 4(12): 1536-1537.
- [96] Peschel U, Bersch C, Onishchukov G. Discreteness in time [J]. *Central European Journal of Physics*, 2008, 6(3): 619-627.
- [97] Bersch C, Onishchukov G, Peschel U. Experimental observation of spectral Bloch oscillations [J]. *Optics Letters*, 2009, 34(15): 2372-2374.
- [98] Bell B A, Wang K, Solntsev A S, et al. Spectral photonic lattices with complex long-range coupling [J]. *Optica*, 2017, 4(11): 1433-1436.
- [99] Yuan L Q, Wang D W, Fan S H. Synthetic gauge potential and effective magnetic field in a Raman medium undergoing molecular modulation [J]. *Physical Review A*, 2017, 95(3): 033801.
- [100] Li W, Qin C, Han T, et al. Bloch oscillations in photonic spectral lattices through phase-mismatched four-wave mixing [J]. *Optics Letters*, 2019, 44(22): 5430-5433.
- [101] Zhang F X, Feng Y M, Chen X F, et al. Synthetic anti-PT symmetry in a single microcavity [J]. *Physical Review Letters*, 2020, 124(5): 053901.
- [102] Schmidt M, Kessler S, Peano V, et al. Optomechanical creation of magnetic fields for photons on a lattice[J]. *Optica*, 2015, 2(7): 635-641.
- [103] Ozawa T, Carusotto I. Synthetic dimensions with magnetic fields and local interactions in photonic lattices [J]. *Physical Review Letters*, 2017, 118(1): 013601.
- [104] Lustig E, Weimann S, Plotnik Y, et al. Photonic topological insulator in synthetic dimensions [J]. *Nature*, 2019, 567(7748): 356-360.
- [105] Dutt A, Lin Q, Yuan L Q, et al. A single photonic cavity with two independent physical synthetic dimensions[J]. *Science*, 2020, 367(6473): 59-64.
- [106] Yu S, Piao X J, Hong J, et al. Interdimensional optical isospectrality inspired by graph networks[J]. *Optica*, 2016, 3(8): 836-839.
- [107] Maczewsky L J, Wang K, Dovgiy A A, et al.

- Synthesizing multi-dimensional excitation dynamics and localization transition in one-dimensional lattices [J]. *Nature Photonics*, 2020, 14(2): 76-81.
- [108] Wimmer M, Regensburger A, Bersch C, et al. Optical diametric drive acceleration through action-reaction symmetry breaking [J]. *Nature Physics*, 2013, 9(12): 780-784.
- [109] Schreiber A, Cassemiro K N, Potoček V, et al. Photons walking the line: a quantum walk with adjustable coin operations [J]. *Physical Review Letters*, 2010, 104(5): 050502.
- [110] Schreiber A, Cassemiro K N, Potoček V, et al. Decoherence and disorder in quantum walks: from ballistic spread to localization [J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(18): 180403.
- [111] Regensburger A, Bersch C, Hinrichs B, et al. Photon propagation in a discrete fiber network: an interplay of coherence and losses [J]. *Physical Review Letters*, 2011, 107(23): 233902.
- [112] Regensburger A, Bersch C, Miri M A, et al. Parity-time synthetic photonic lattices [J]. *Nature*, 2012, 488(7410): 167-171.
- [113] Regensburger A, Miri M A, Bersch C, et al. Observation of defect states in PT-symmetric optical lattices [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(22): 223902.
- [114] Wimmer M, Regensburger A, Miri M A, et al. Observation of optical solitons in PT-symmetric lattices [J]. *Nature Communications*, 2015, 6: 7782.
- [115] Wimmer M, Price H M, Carusotto I, et al. Experimental measurement of the Berry curvature from anomalous transport [J]. *Nature Physics*, 2017, 13(6): 545-550.
- [116] Vatnik I D, Tikan A, Onishchukov G, et al. Anderson localization in synthetic photonic lattices [J]. *Scientific Reports*, 2017, 7: 4301.
- [117] Wang S L, Wang B, Lu P X. PT-symmetric Talbot effect in a temporal mesh lattice [J]. *Physical Review A*, 2018, 98(4): 043832.
- [118] Schreiber A, Gábris A, Rohde P P, et al. A 2D quantum walk simulation of two-particle dynamics [J]. *Science*, 2012, 336(6077): 55-58.
- [119] Chen C, Ding X, Qin J, et al. Observation of topologically protected edge states in a photonic two-dimensional quantum walk [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(10): 100502.
- [120] Sun K, Gu Z C, Katsura H, et al. Nearly flatbands with nontrivial topology [J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(23): 236803.
- [121] Tang E, Mei J W, Wen X G. High-temperature fractional quantum Hall states [J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(23): 236802.
- [122] Umucalilar R O, Carusotto I. Fractional quantum Hall states of photons in an array of dissipative coupled cavities [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 108(20): 206809.
- [123] Qin C Z, Wang B, Lu P X. Frequency diffraction management through arbitrary engineering of photonic band structures [J]. *Optics Express*, 2018, 26(20): 25721-25735.
- [124] Mross D F, Alicea J, Motrunich O I. Explicit derivation of duality between a free Dirac cone and quantum electrodynamics in (2+1) dimensions [J]. *Physical Review Letters*, 2016, 117(1): 016802.
- [125] Fang K, Yu Z, Fan S. Photonic Aharonov-Bohm effect based on dynamic modulation [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 108(15): 153901.
- [126] Fang K J, Yu Z F, Fan S H. Realizing effective magnetic field for photons by controlling the phase of dynamic modulation [J]. *Nature Photonics*, 2012, 6(11): 782-787.
- [127] Yuan L Q, Fan S H. Three-dimensional dynamic localization of light from a time-dependent effective gauge field for photons [J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(24): 243901.
- [128] Longhi S. Dynamic localization and Bloch oscillations in the spectrum of a frequency mode-locked laser [J]. *Optics Letters*, 2005, 30(7): 786-788.
- [129] Bersch C, Onishchukov G, Peschel U. Spectral and temporal Bloch oscillations in optical fibres [J]. *Applied Physics B*, 2011, 104(3): 495-501.
- [130] Berry M V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes [J]. *Proceedings of the Royal Society of London A Mathematical and Physical Sciences*, 1984, 392(1802): 45-57.
- [131] Resta R. Manifestations of Berry's phase in molecules and condensed matter [J]. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2000, 12(9): R107-R143.
- [132] Roushan P, Neill C, Chen Y, et al. Observation of topological transitions in interacting quantum circuits [J]. *Nature*, 2014, 515(7526): 241-244.
- [133] Schroer M D, Kolodrubetz M H, Kindel W F, et al. Measuring a topological transition in an artificial spin-1/2 system [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 113(5): 050402.
- [134] Yale C G, Joseph Heremans F, Zhou B B, et al. Optical manipulation of the Berry phase in a solid-state spin qubit [J]. *Nature Photonics*, 2016, 10(3): 184-189.

- [135] Aubry S, André G. Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices [C]//Proceedings of the VIII International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics, Kiryat Anavim, March 25-29, 1979:133-164.
- [136] Kraus Y E, Lahini Y, Ringel Z, et al. Topological States and adiabatic pumping in quasicrystals [J]. Physical Review Letters, 2012, 109(10): 106402.
- [137] Zilberberg O, Huang S, Guglielmon J, et al. Photonic topological boundary pumping as a probe of 4D quantum Hall physics [J]. Nature, 2018, 553 (7686): 59-62.
- [138] Verbin M, Zilberberg O, Kraus Y E, et al. Observation of topological phase transitions in photonic quasicrystals[J]. Physical Review Letters, 2013, 110(7): 076403.
- [139] Rodriguez A W, McCauley A P, Avniel Y, et al. Computation and visualization of photonic quasicrystal spectra via Bloch's theorem[J]. Physical Review B, 2008, 77(10): 104201.
- [140] Wang Q, Xiao M, Liu H, et al. Optical interface states protected by synthetic Weyl points[EB/OL]. (2017-08-17)[2020-10-29]. <https://arxiv.org/abs/1708.05664>.
- [141] Fan X Y, Qiu C Y, Shen Y Y, et al. Probing Weyl physics with one-dimensional sonic crystals [J]. Physical Review Letters, 2019, 122(13): 136802.
- [142] Wang Q, Wang Q, Wang Q, et al. Exceptional cones in 4D parameter space [J]. Optics Express, 2020, 28(2): 1758-1770.
- [143] Zhong F, Ding K, Zhang Y, et al. Angle-resolved thermal emission spectroscopy characterization of non-Hermitian metacrystals [J]. Physical Review Applied, 2020, 13: 014071.
- [144] Hu M Y, Ding K, Qiao T, et al. Realization of photonic charge-2 Dirac point by engineering supermodes in topological superlattices [ J ]. Communications Physics, 2020, 3: 130.
- [145] Lu L, Gao H Z, Wang Z. Topological one-way fiber of second Chern number [ J ]. Nature Communications, 2018, 9: 5384.